

БЕРДСКИЙ ФИЛИАЛ  
ГОСУДАРСТВЕННОГО АВТОНОМНОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ  
НОВОСИБИРСКОЙ ОБЛАСТИ  
«НОВОСИБИРСКИЙ МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

**Методическая разработка открытого аудиторного занятия  
по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического  
анализа; геометрия»**

**Тема: «Применение определённого интеграла  
к вычислению площадей плоских фигур»**

**Разработала:**

Субачева Ирина Борисовна,  
преподаватель высшей  
квалификационной категории

**Группа 330**

**Специальность 34.02.01 Сестринское дело**

**Дата проведения 11.04.2019**

**Продолжительность занятия 90 минут**

### **Пояснительная записка**

Методическая разработка аудиторного занятия «Применение определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур» по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа» предназначена для проведения занятия в группах первого курса специальности Сестринское дело.

**Тема:** «Применение определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур».

**Тип занятия:** занятие обобщения и систематизации знаний.

**Вид занятия:** практическое занятие в форме сюжетно-ролевой игры.

**Цель занятия:** обобщить и систематизировать знания по теме «Применение определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур».

**Задачи:**

***образовательные:***

- закрепить полученные знания и умения при решении прикладных задач с применением определенного интеграла;
- сформировать представление о практическом применении интеграла в различных областях.

***развивающие:***

- способствовать творческому подходу к решению практических задач;
- развивать логическое и творческое мышления;
- сформировать умение осуществлять самоконтроль и взаимоконтроль.

***воспитательные:***

- способствовать овладению необходимыми навыками самостоятельной учебной деятельности;
- сформировать положительную мотивацию обучения студентов в процессе включения их в игру.

**Достижение студентами следующих результатов:**

***личностных:***

**ЛР 3.** Развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования.

**ЛР 4.** Овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественнонаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки.

**ЛР 6.** Готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности.

**ЛР 7.** Готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности.

***метапредметных:***

**МР 2.** Умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты.

**МР 3.** Владение навыками познавательной, учебно-исследовательской проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания.

***предметных:***

**ПР 3.** Владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач.

**ПР 6.** Владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах.

**План занятия:**

1. Организационный этап. (2 минут)
2. Подготовительный этап. Повторение ранее пройденного материала, необходимого для работы на занятии. (18 минут)
3. Основной этап. Применение определенного интеграла при решении прикладных задач. (Организация сюжетно-ролевой игры). (45 минут)
4. Динамическая пауза. (5 минут)
5. Проверочная работа. (15 минут)
6. Подведение итогов. (5 минут)

**Ход занятия**

***1. Организационный этап***

- приветствие;
- объявление темы занятия;
- цель занятия;
- план работы на занятии.

Здравствуйте. Открываем тетради, записываем число и тему нашего занятия «Применение определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур».

Сегодня на занятии мы должны обобщить и систематизировать знания по теме «Применение определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур». Интегральное исчисление выносится на промежуточную аттестацию. Это задания под номером 8.

План работы вы видите на экране.

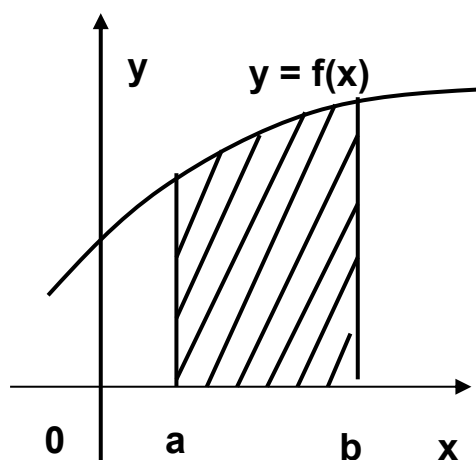
**2. Подготовительный этап. (Повторение ранее пройденного материала, необходимого для работы на занятии).**

**Задание 1.** Давайте вспомним, что вы знаете про интеграл.

(Студенты по очереди называют, а на экране показывается).

- определенные и неопределенные интегралы;
- формула Ньютона – Лейбница для вычисления определённых интегралов;
- таблица основных интегралов;
- свойства интегралов;
- понятие первообразной;
- нахождение площадей криволинейной трапеции.

**Задание 2.** Назвать формулу для вычисления площади фигуры, изображённой на рисунке 1 слева? Справа предлагается три варианта ответа.



1

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2

$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

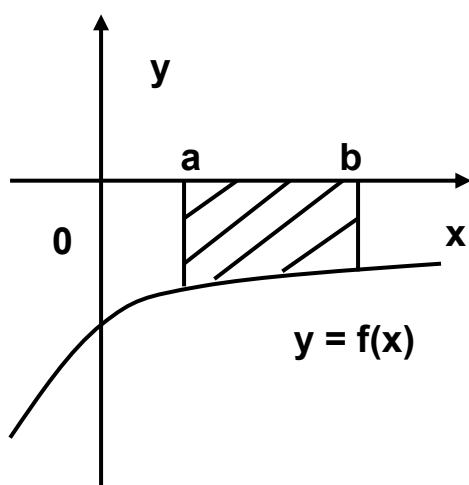
3

$$S = \iint_a^b f(x) dx$$

Рисунок 1 – Определение формулы для вычисления площади фигуры

**Ответ: под цифрой 1.**

**Задание 3.** Назвать формулу для вычисления площади фигуры, изображённой на рисунке 2 слева? Справа предлагается три варианта ответа.



1

$$S = \iint_a^b f(x) dx$$

2

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

3

$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

Рисунок 2 – Определение формулы для вычисления площади фигуры

**Ответ: под цифрой 3.**

**Вывод:** Мы вспомнили основные формулы и правила вычисления.

**3. Основной этап. Применение определенного интеграла при решении прикладных задач. (Организация сюжетно-ролевой игры).**

Изучая любую тему, вы всегда задаёте вопрос: «Где это применяется в жизни?»

Так, где применяется интеграл в жизни? На каких дисциплинах мы сможем применить наши знания об интеграле? Возможно ли развитие современной науки без использования интеграла?

Настала пора применить наши знания и умения при решении практических задач.

Итак, студенты из 330 группы решили провести своё собственное исследование по теме «Применение определённого интеграла к вычислению площадей плоских фигур», и показать значение интегрального исчисления в различных областях.

## Исследовательская часть

**Первая группа, побывав на экскурсии в Центральном сибирском ботаническом саду, решила заняться озеленением колледжа.**

Перед главным входом в наш колледж решено разбить клумбу. По форме клумба не должна быть круглой, квадратной или прямоугольной. Она должна содержать в себе прямые и кривые линии. Пусть она будет плоской фигурой, ограниченной линиями  $y = \frac{4}{x^2} + 2$ ,  $x=1$ ,  $x=4$ ,  $y=6$  (Рисунок 3). Необходимо подсчитать, сколько денег можно получить за вскапывание этой клумбы, если за каждый  $m^2$  выплачивают 100 руб.?

**Решение.**

Построим график и выделим искомую площадь.

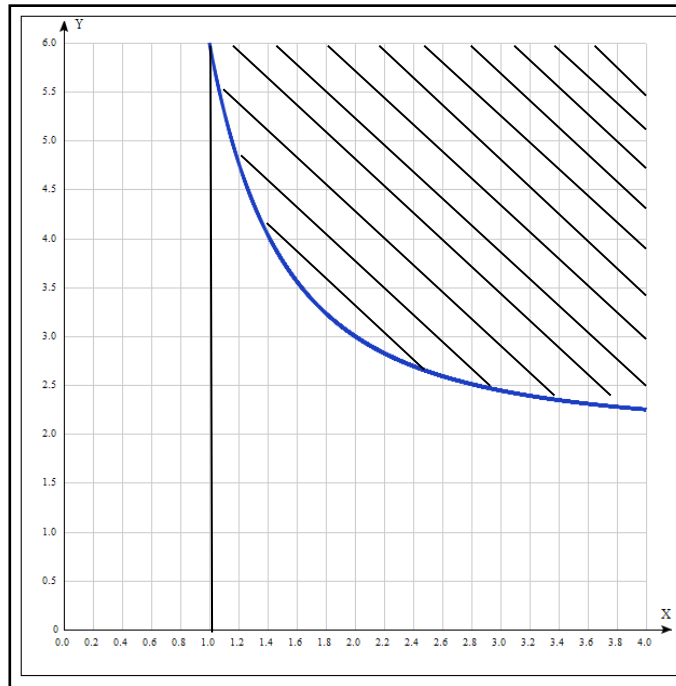


Рисунок 3 – Фигура, ограниченная графиками функций

$$y = \frac{4}{x^2} + 2, x=1, x=4, y=6$$

Вычислим площадь полученной фигуры с помощью интеграла:

$$S = S_{\text{прямоугольника}} - \int_1^4 \left( \frac{4}{x^2} + 2 \right) dx = 3 * 6 - \left( -\frac{4}{x} + 2x \right) \Big|_1^4$$

$$S = 18 - ((-1 + 8) - (-4 + 2)) = 18 - (7 + 2) = 9$$

$9 * 100 = 900$  рублей – заработок.

**Вывод:** Зная данную тему, мы можем вычислить площадь участка.

**Вторая группа это члены клуба «Милосердие». Они занимаются благотворительными акциями.**

Приближается Международный день семьи. Студенты-волонтеры решили организовать праздник для детей-инвалидов и их родителей.

Для проведения праздника объявляется сбор средств на аренду участка ограниченного линиями  $y = x^2 - 9$  и  $y = 0$  (Рисунок 4). Стоимость за  $1\text{м}^2$  – 50 рублей.

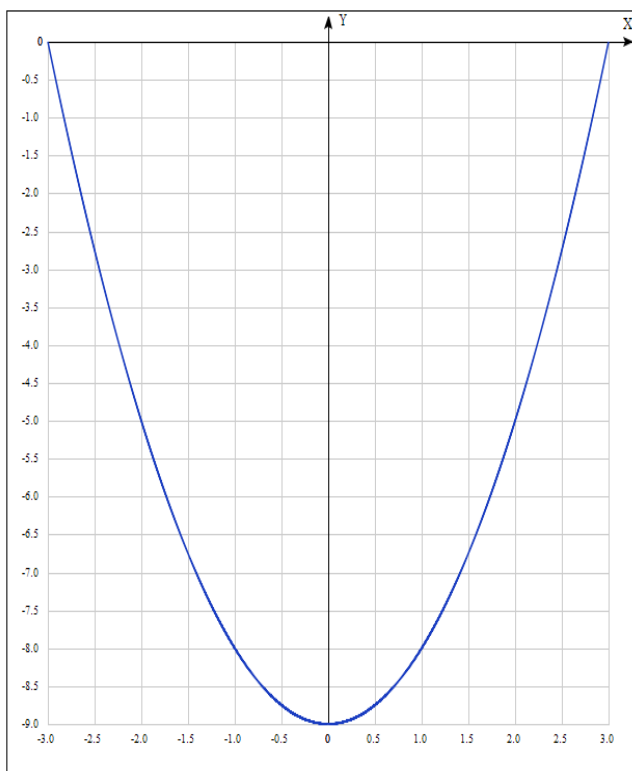


Рисунок 4 – Фигура, ограниченная графиками функций  $y = x^2 - 9$  и  $y = 0$

$$\int_{-3}^3 (x^2 - 9) dx = \left( \frac{x^3}{3} - 9x \right) \Big|_{-3}^3 = (9 - 27) - (-9 + 27) = -18 - 18 = -36$$

$$S = 36$$

$$36 * 50 = 1800 \text{ (руб.)}$$

**Вывод:** Зная данную тему, мы смогли вычислить площадь необходимого нам участка.



**Третья группа занимается уборкой территории центрального парка города Бердска.**

Рассчитать сколько времени уйдет на очистку территории, ограниченной линиями  $y = -\sqrt[2]{x} + 50$ ,  $y = \sqrt[2]{x}$ ,  $x=0$ ,  $x=50$  (Рисунок 5). Если на  $1\text{м}^2$  уходит 30 секунд, а студентов – 10.

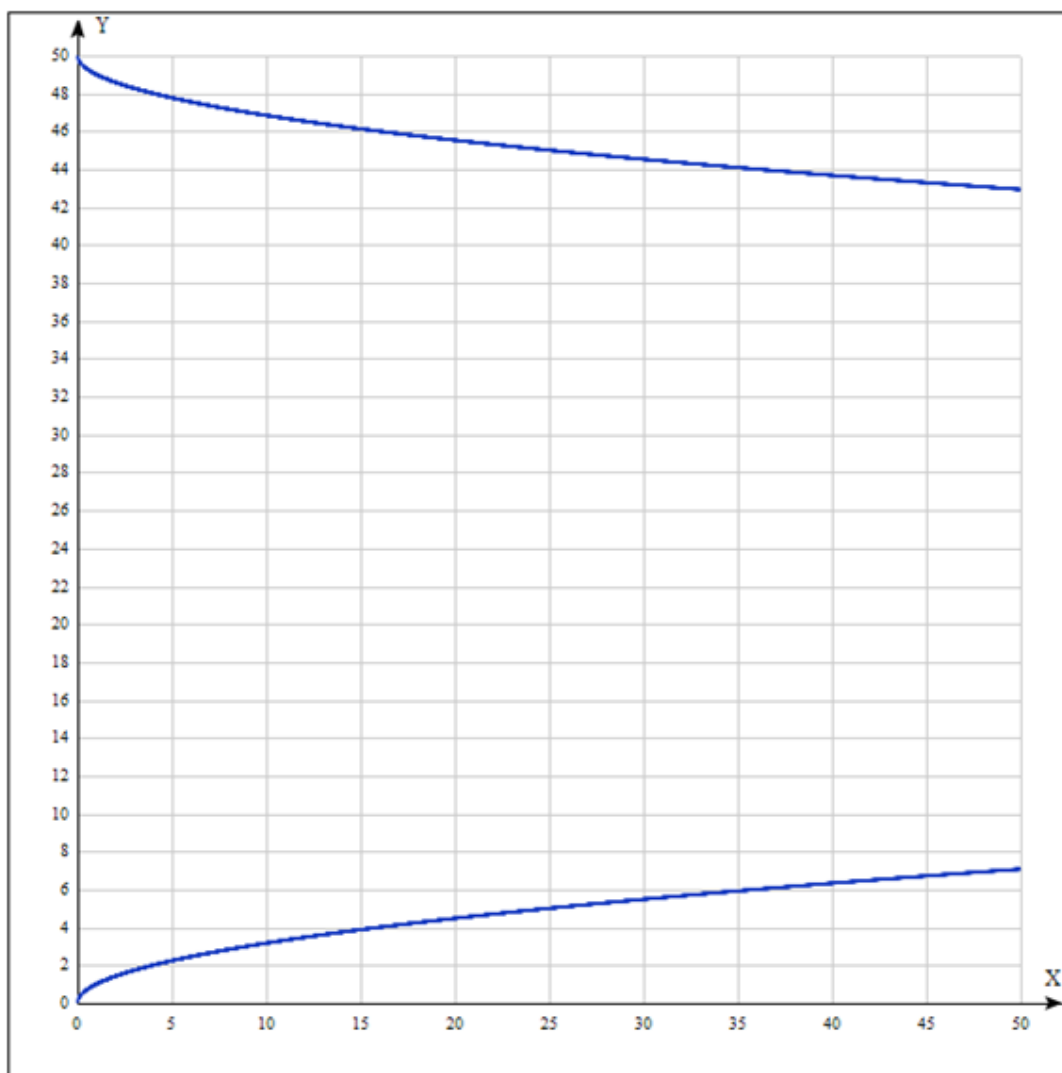


Рисунок 5 – Фигура, ограниченная графиками функций

$$y = -\sqrt[2]{x} + 50, y = \sqrt[2]{x}, x=0, x=50$$

$$S_{\text{территории}} = 50 * 50 - 2 * \int_0^{50} \sqrt[2]{x} dx = 2500 - 2 * \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^{50}$$

$$= 2500 - 2 * \frac{2^2 \sqrt[2]{50^3}}{3} = 2500 - 2 * \frac{2 * 50 * 5 * \sqrt[2]{2}}{3} = 2500 - 471 = 2029(\text{м}^2)$$

$$2029:10*0,5=101,45\text{минут}$$

101,45:60=1,7 часа

**Вывод:** Зная данную тему, мы смогли рассчитать, сколько времени уйдет на очистку территории.

#### **Четвёртая группа побывала в столовой.**

Интеграл нашел широкое применение не только в физике и математике, но и в решении многих практических задач.

Вот пример одной из них:

*Практикантка Маша насыпала в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросила повара:*

- *Сколько нужно налить воды, чтобы получилось вкусная каша?*
- *Это очень просто, - ответил повар - Наклони кастрюлю, постучи, чтобы каша пересыпалась и закрыла 1/2 дна (Рисунок б). Теперь отметь точку на стенке кастрюли у края, до которого поднялась крупа. До этого уровня надо налить воды.*

- *Так ведь пшена можно насыпать больше или меньше, да и кастрюли бывают разные: широкие, узкие – усомнилась Маша.*

- *Все равно мой способ годится в любом случае!- гордо ответил повар.*

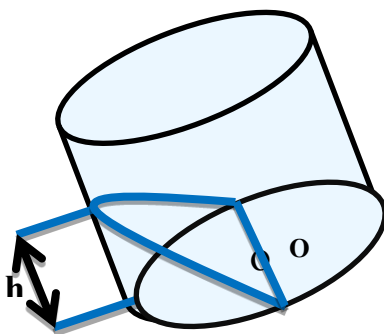
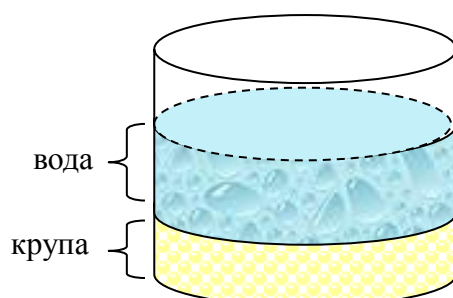


Рисунок б – Каша в кастрюле пересыпалась и закрыла 1/2 дна

Докажем, что отношение объёмов воды ( $V_{\text{в}}$ ) и каши ( $V_{\text{к}}$ ) по данному рецепту для любой цилиндрической кастрюли получается одинаковым.



$$V_B = V_C - V_K, V_C = \pi R^2 h$$

Поместим исследуемую модель в систему координат, так чтобы основание цилиндра лежало в плоскости  $XOY$ , а центр основания  $O$  стал началом системы координат (Рисунок 7).

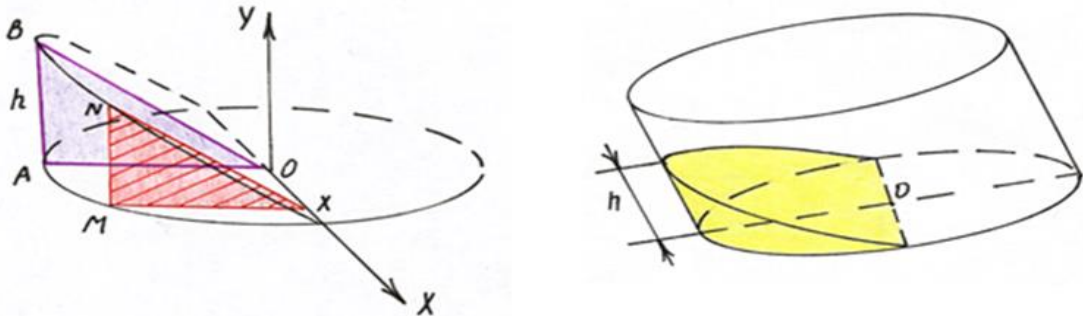


Рисунок 7 – Модель в системе координат

Через  $x \in OX$ ,  $x \in [-R; R]$  строим сечение тела плоскостью перпендикулярной ( $XOY$ ) параллельно  $OY$ . Треугольник  $MNX$  - сечение.

Треугольник  $MNX$  подобен треугольнику  $ABO$ :

$$\frac{MN}{AB} = \frac{MX}{AO}$$

$$\frac{MN}{h} = \frac{y}{R}$$

$$MN = \frac{hy}{R}$$

$M$   $\in$  окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ , т. е.  $y^2 = R^2 - x^2$

$$S_{MNX} = \frac{1}{2} * MN * MX = \frac{1}{2} * \frac{hy}{R} * y = \frac{hy^2}{2R} = \frac{h(R^2 - x^2)}{2R}$$

$$V_{\text{каши}} = 2 \int_0^R S(x) dx = \int_0^R \frac{h(R^2 - x^2)}{2R} = \frac{h}{R} \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R$$

$$V_{\text{каши}} = \frac{h}{R} \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{h}{R} * \frac{2R^3}{3} = \frac{2hR^2}{3}$$

$$V_{\text{воды}} = V_{\text{цилиндра}} - V_{\text{каши}} = \pi R^2 h - \frac{2hR^2}{3} = \frac{3\pi R^2 h}{3} - \frac{2hR^2}{3} = \frac{hR^2}{3} (3\pi - 2)$$

$$\frac{V_{\text{воды}}}{V_{\text{каши}}} = \frac{\frac{hR^2}{3} (3\pi - 2)}{\frac{2hR^2}{3}} = 1,5\pi - 1, \text{ следовательно, не зависит от размеров кастрюли.}$$

**Вывод:** На примере данной задачи мы показали, что математика - это наука, определённая самой жизнью.

Спасибо всем группам! Подошло время подвести итоги. Все группы убедительно ответили, что интеграл имеет достаточно широкое применение и привели множество примеров.

#### **4. Динамическая пауза**

Цель физкультминутки: снятие утомляемости и сонливости, восстановление физических сил.

##### **Задание 1.**

- **Если на экране определенный интеграл** – улыбаясь подняться на носки, руки вверх и потянуться. *(Во-первых, при поднятых руках желудочно-кишечный тракт становится менее извилистым, что способствует быстрому прохождению пищи. Таким образом происходит профилактика процессов гниения и брожения, развития дисбактериоза.*

*Во-вторых, поднимая руки вверх, вы препятствуете их отвисанию. Отвисшие руки деформируют позвоночник, вследствие чего развивается остеохондроз и другие болезни. Поднимая руки, вы позволяете позвоночнику вытянуться, а также развиваете гибкость.*

*В-третьих, с возрастом органы и грудной, и брюшной полости как бы оседают, смещаются со своего природного места. Поднимая руки вверх, вы приподнимаете и внутренние органы. При опущенных органах отвисает живот, слабеет пресс. Поднимая руки, вы укрепляете мышцы живота.*

*Поднимать руки лучше так: держать их параллельно или сомкнуть в «замок», немного потянуться вверх следом за ними).*

- **Если на экране неопределенный интеграл** – Делаем наклоны головой вперед и назад, вправо-влево. Движения делаем не спеша, не резко. *(Эти упражнения помогут вам избавиться от головных болей, головокружений, повышенного давления).*

- **Звук музыки** – Исходная стойка.

### Задание 2.

- **Если на экране правильный вариант ответа** – Руки к плечам, вращение плечами вперёд и назад. (Упражнения для плечевого сустава направлены на увеличение его подвижности, нормализации физической нагрузки и уменьшение внутрисуставного отёка).

- **Если на экране неправильный вариант ответа** – Руки перед грудью, рывки руками в стороны. (Рывки руками помогают снять напряжение с позвоночника и улучшают кровообращение).

### Задание 3.

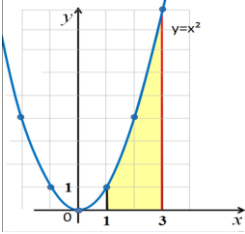
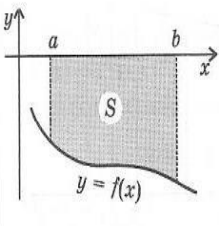
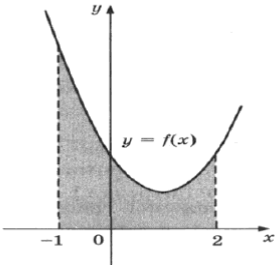
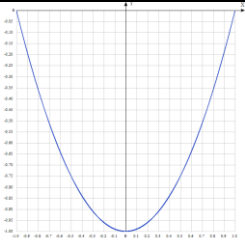
**Если результат интеграла положительное число** – Ноги на ширине плеч. Стараясь сохранить как можно более ровную спину, без рывков, наклоняйтесь вниз, цель - коснуться кончиками пальцев или даже ладонями пола. (Это упражнение полезно для растяжки, тянутся мышцы спины, выпрямляется позвоночник, что предотвращает развитие сколиоза).

**Звук музыки** – Встать прямо, выпрямить спину, руки на поясе.

**Если результат интеграла отрицательное число** – Руки на поясе. Повороты туловища влево и вправо. (Повороты туловища, укрепляют косые мышцы живота и снимают нагрузку с позвоночника).

### Задания для динамической паузы

Задание 1	Ответ
$\int_0^1 x^3 dx$	Определенный интеграл
$\int x^3 dx$	Неопределенный интеграл
$\int x^2 dx$	Неопределенный интеграл
$\int_0^5 x^2 dx$	Определенный интеграл

Задание 2	Ответ
$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$	Верно
$f(x) = x; F(x) = 10x^2 + C$	Неверно
$\int_0^2 5x^4 dx = 32$	Верно
$f(x) = 3; F(x) = 30x + C$	Неверно
Задание 3	Ответ
	Значение интеграла положительное
	Значение интеграла отрицательное
	Значение интеграла положительное
	Значение интеграла отрицательное

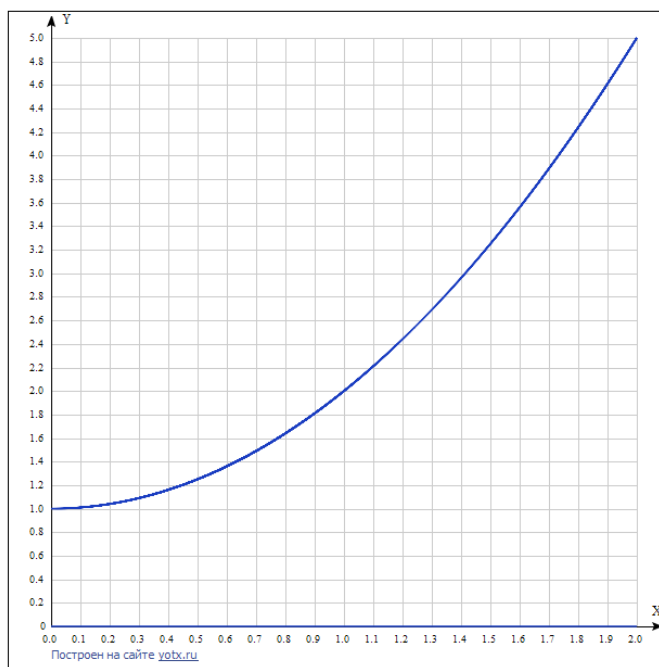
## 5. Практическая работа

### Вариант 1

Вычислите площадь фигуры,  
ограниченной линиями  
 $y = x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

### Решение

$$S = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = 4\frac{2}{3}$$

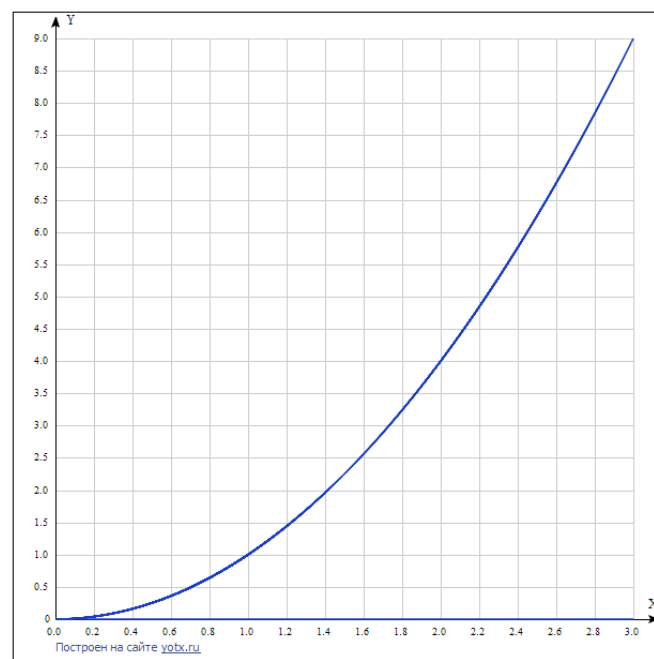


### Вариант 2

Вычислите площадь фигуры,  
ограниченной линиями  
 $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ .

### Решение

$$S = \int_0^3 (x^2) dx = 9$$

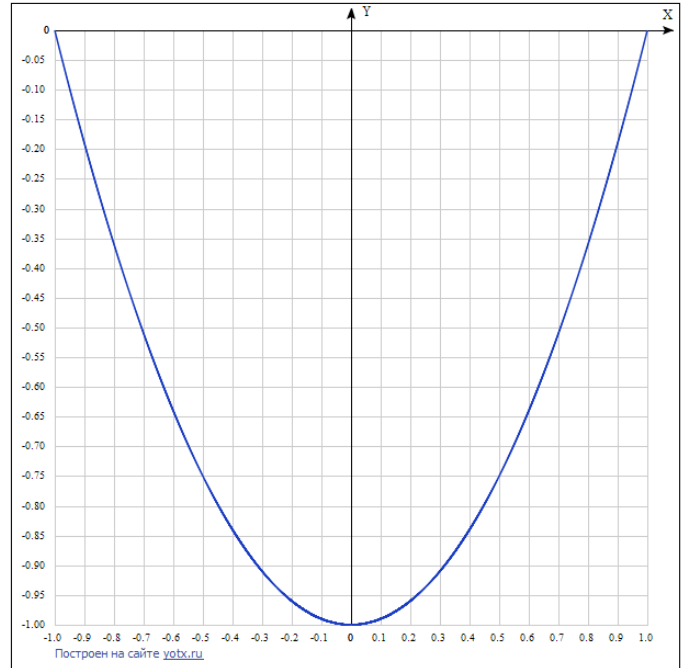


Вариант 3

Вычислите площадь фигуры,  
ограниченной линиями  
 $y = x^2 - 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

Решение

$$S = - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = 1 \frac{1}{3}$$

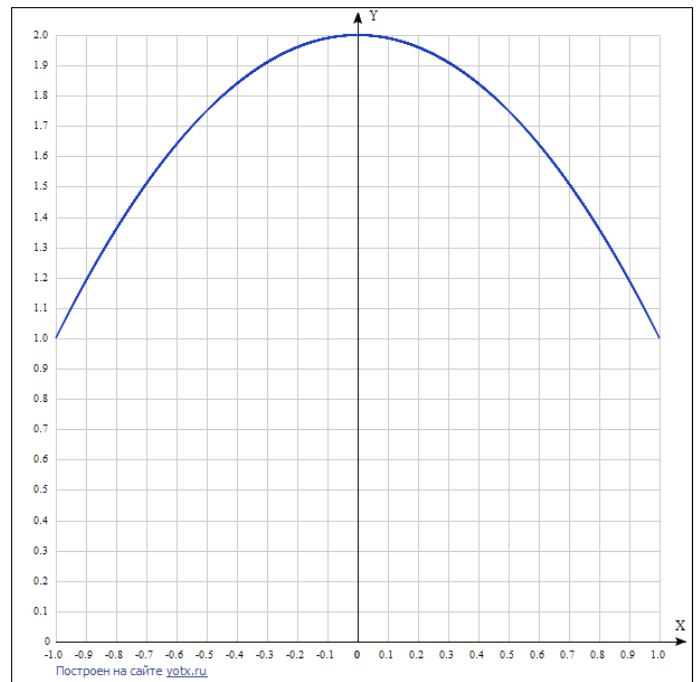


Вариант 4

Вычислите площадь фигуры,  
ограниченной линиями  
 $y = -(x^2) + 2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

Решение

$$S = \int_{-1}^1 (-x^2 + 2) dx = 3 \frac{1}{3}$$





## **6. Подведение итогов**

6.1. Уважаемые студенты! А как Вы думаете, для чего была организована эта игра? Научились ли вы применять определённый интеграл при решении прикладных задач? Получили ли вы опыт совместной работы? Смогли ли вы сконцентрироваться на выполнении задания?

6.2. Оцените работу своей группы.

**Лист самооценки работы группы (онлайн-анкета).**

**Все ли студенты группы принимали участие в работе?**

- a) Да, все работали одинаково
- b) Нет, работал только один
- c) Кто-то работал больше, кто-то меньше других

**Дружно ли вы работали? Были ссоры?**

- a) Работали дружно, ссор не было
- b) Работали дружно, спорили, но не ссорились
- c) Очень трудно было договариваться, не всегда получалось

**Тебе нравится результат работы группы?**

- a) Да, всё получилось хорошо
- b) Нравится, но можно сделать лучше
- c) Нет, не нравится

**4. Оцени свой вклад в работу группы.**

- a) Почти всё сделали без меня
- b) Я сделал очень много, без меня работа бы не получилась
- c) Я принимал самое активное участие

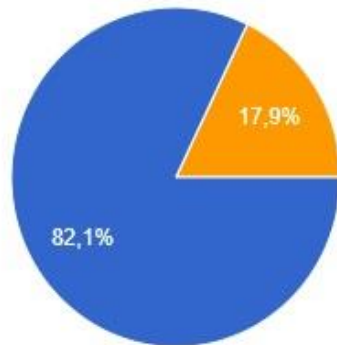
**5. Оцените свою работу на занятии.**

- a) Работал не в полную силу, хочу улучшить результат.
- b) Работал активно, результатом доволен.

## Результаты онлайн оценивания.

Все ли студенты группы принимали участие в работе?

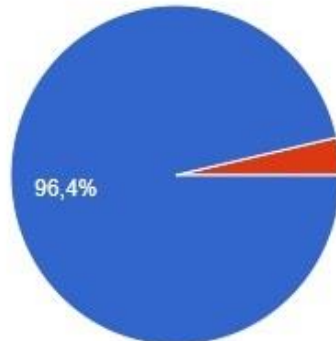
28 ответов



- Да, все работали одинаково
- Нет, работал только один
- Кто-то работал больше, кто-то меньше других

Дружно ли вы работали? Были ссоры?

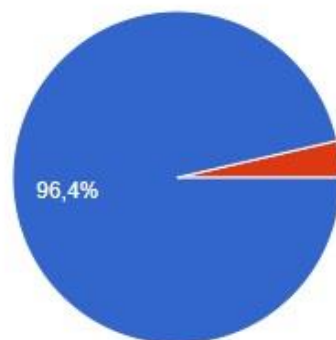
28 ответов



- Работали дружно, ссор не было
- Работали дружно, спорили, но не ссорились
- Очень трудно было договариваться, не всегда получалось

Дружно ли вы работали? Были ссоры?

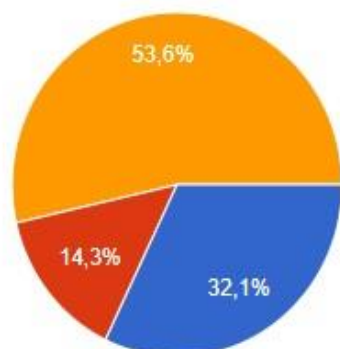
28 ответов



- Работали дружно, ссор не было
- Работали дружно, спорили, но не ссорились
- Очень трудно было договариваться, не всегда получалось

### Оцени свой вклад в работу группы.

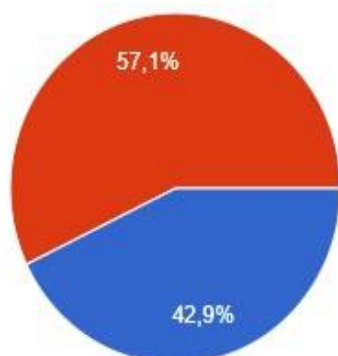
28 ответов



- Почти всё сделали без меня
- Я сделал очень много, без меня работа бы не получилась
- Я принимал самое активное участие

### 5. Оцените свою работу на занятии.

28 ответов



- Работал не в полную силу, хочу улучшить результат
- Работал активно, результатом доволен

6.3. Пока идет заполнение Листа самооценки, студенты по одному подходят к столу, на котором лежат слова и складывают отзыв о работе на занятии (каждый должен положить только одно слово).

#### Набор слов

У

.

.

.

.

НАС

ВСЁ

ПОЛУЧИЛОСЬ

ТЕМА

:

ЗНАЮТ

И

!

!

ПОНИМАЮТ

ВСЕ

ДРУГОГО

НО

НА

ОЧЕНЬ

И

ПРИМЕНИТЬ

ПРОСТО

ПОМОГАЛИ

ПРАКТИКЕ

ССОРИЛИСЬ

ОТЛИЧНАЯ

И

ТОЛЬКО

РАБОТА

НЕ

РАБОТАЛИ

МОЛОДЦЫ

НЕ

ДРУЖНО

НАДО

НАУЧИТЬ

,

### Результат

РАБОТАЛИ ДРУЖНО, НО НЕ ССОРИЛИСЬ И У НАС ВСЁ  
ПОЛУЧИЛОСЬ.

ПОМОГАЛИ НА ПРАКТИКЕ ПРИМЕНИТЬ.

ТЕМА: ВСЕ ЗНАЮТ И ПОНИМАЮТ, НАДО ТОЛЬКО НАУЧИТЬ  
ДРУГОГО.

РАБОТА ОТЛИЧНАЯ

МОЛОДЦЫ!